

Berechnung linearer Lichtwechselelemente am Beispiel CD Peg

Hans-Mereyntje Steinbach

Abstract: *For this long time neglected variable new light-change-elements have been derived on basis of CCD-observations.*

CD Peg	RA _{J2000} : 21h40m41.11s	P: 0 ^d .57104651	RRAB	Max: 13.6	Min: 14.7 p
	DC _{J2000} : +21°04'48".3	E0: JD2455479.3873	M-m: 15% (2.0h)		
	(All data: GCVS; Elements, M-m: his paper)				

Motivation

Der Titel dieses Aufsatzes lässt den geneigten Leser vielleicht zunächst ein wenig stutzen: Worum geht's denn hier? Um neue Lichtwechselelemente für den RR-Lyrae-Stern CD Peg? Oder um Berechnungsmethoden? Nun, es geht mir hierbei genau um beides. Im Nachgang zu meinem Vortrag über die Methode der kleinsten Quadrate auf der Mitgliederversammlung im letzten Jahr erhielt ich aufgrund von Nachfragen den Eindruck, für den häufigen Anwendungsfall der Bestimmung linearer Lichtwechselelemente ein Musterbeispiel zu geben. Hierzu passt es gerade wunderbar, dass für den sehr selten beobachteten RR-Lyr-Stern die Lichtwechselelemente verbessert werden müssen.

Geschichte und Literatur

Über CD Peg gibt es nur spärliche Literatur. Entdeckt wurde CD Peg im Rahmen eines von Harlow Shapley initiierten Surveys des Harvard College Observatoriums zum systematischen Studium galaktischer veränderlicher Sterne [1]. Dieses Projekt begann in den 1920er Jahren mit Fokus auf Objekte in geringen galaktischen Breiten, und wurde in den 1930er Jahren auf Felder hoher galaktischer Breite ausgedehnt, quasi um Referenzwerte aus Gebieten ohne Einfluss galaktischer Strukturen oder Absorption zu erhalten.

Die Zielsetzung hierbei war die Vermessung des Milchstraßensystems sowie die Erlangung von Aufschluss über die Verteilung der unterschiedlichen Veränderlichen-typen innerhalb der Milchstraße. Interessanterweise war bereits die Bedeutung der RR-Lyr-Sterne als „Standardkerze“ für die galaktische Entfernungsmessung bekannt, als auch deren ungefähre absolute Helligkeit, die „auf nahe 0 mag“ geschätzt wurde (heutiger Wert: ca. 0.6 mag).

Weiter ist interessant, dass Shapley eine ökonomische Betrachtung für das Projekt durchführte: Er kam zu dem Schluss, dass – bezogen auf eine photographische Grenzgröße von ca. 15.5-16.0 mag – nur wenige RR-Lyr-Sterne je 100 Quadratgrad zu finden seien würden, und dass damit das Projekt sehr teuer werden würde. Dennoch wurde der wissenschaftliche Beitrag zur Erforschung des Milchstraßensystems als so hoch angesehen, dass sich der Aufwand lohnen würde. Die Felder wurden vorwiegend mit dem 8"-Bache und dem 10"-Metcalf-Teleskop der Boyden Station sowie dem 8"-Ross-Teleskop der Oak Ridge Station, Massachusetts, aufgenommen.

In Summe wurden von dem Feld "MWF202", in welchem CD Peg liegt, 228 Aufnahmen gemacht und 67 neue Veränderliche entdeckt.

CD Peg wurde in [1] als HV6155 angezeigt mit den noch aktuell im GCVS [2] verzeichneten Daten zu Helligkeitsgrenzen und Lichtwechselelementen:

$$T_{\text{Max,HK}} = \text{JD24 2424769.65} + 0^{\text{d}}.57104 * E \quad (1)$$

Ansonsten listet die SIMBAD-Datenbank [3] nur 4 weitere Quellen auf, von denen zwei BAV-Mitteilungen sind. Zu dem Objekt liegen also kaum Informationen vor.

Beobachtungen

In der GEOS-Datenbank [4] liegen 3 Beobachtungen vor (aufgrund einer Doppelmeldung sind 4 Einträge vorhanden). Ich selbst hatte den Stern im Oktober 2010 beobachtet. Tabelle 1 gibt alle 4 bis dato zugänglichen Maximumzeiten wieder:

Nr.	Max _{HK} JD24...	Bgl. Datum	E1	(B-R)1	E2	(B-R)2	Beobachter
1	48536.60	7.10.91	41.620	0.2652	41,620	0.2652	Schmidt et. al., NM
2	51359.290	29.06.99	46.564	-0.2666	46,563	0.3045	Wils et. al., NM
3	54457.2128	22.12.07	51.989	-0.2412	51,988	0.3353	Maintz
4	55479.3883	09.10.10	53.779	-0.2222	53,778	0.3489	Steinbach

Tab. 1: CD Peg – Maximumzeiten (hel. korr.) 1991-2010 NM=Normalmaximum.

Die Qualitäten der Beobachtungen sind sehr unterschiedlich. So weist Schmidt [5] darauf hin, dass Genauigkeit der von ihm abgeleiteten Maximumzeiten ausreichend seien, um zum damaligen Zeitpunkt Phasenberechnungen durchzuführen, jedoch nicht, um neue Elemente abzuleiten. Das liegt daran, dass Schmidts Daten Ergebnisse aus einem Survey-Projekt sind, und die darin enthaltenen Sterne nicht sehr häufig beobachtet wurden. Die Datenbasis seiner Beobachtungen an CD Peg umfasst lediglich 11 einzelne Beobachtungen aus einem Zeitraum von 27 Tagen!

Die Beobachtung von Frau Maintz ist die erste fast durchgängig beobachtete Lichtkurve und stellt damit einen wichtigen Eckpunkt für die Datenreduktion dar. Allerdings fällt sie aus dem Trend der Beobachtungen mit einem etwas zu kleinen (B-R)-Wert auf. Ein Blick auf die Lichtkurve zeigte dann die Ursache hierfür: Die Lichtkurve ist aus zwei dichtbesetzten Teilen vom 19. und 22. Dezember 2007 zusammengesetzt, die sich kurz vor dem Maximum treffen. Das Maximum selbst ist aber in der Nacht vom 22.12. durchgehend beobachtet worden, wenn auch nur mit einem kurzen Lichtanstieg. Wertet man diese Nacht allein aus, so erhält man die in Tabelle 1 angezeigte Zeit, die zu einem besseren (B-R)-Wert führt.

Sämtliche Beobachtungen der Tabelle 1 sind aus neuerer Zeit, verglichen mit der Original epoche aus dem Jahr 1926. Ein Blick auf die Epochen verdeutlicht, dass zwischen Nullepoche und erster vollständiger Maximumbeobachtung von Frau Maintz nahezu 52.000 Schwingungsvorgänge des Sterns liegen. Mit der unter [1]

angegebenen Periode mit 5 Dezimalen Genauigkeit kann man abschätzen, dass man über einen Zeitraum von 40-50.000 Perioden durchaus schon in den Bereich kommt, wo die zugeordnete Epoche um +/-1 falsch sein kann. In der Tat sehen wir solch einen Effekt, der ab der 2. Beobachtung im Juni 1999 einsetzt: Aufgrund eines etwas zu kleinen Periodenwertes ergibt sich ab diesem Zeitpunkt ein rundungsbedingt zu großer Epochenwert E1. Bei der Differenzenbildung "(B-R)1" ergibt sich dann der Sprung zu den negativen Werten. Für eine korrekte Darstellung sind also die Epochenwerte ab der zweiten Beobachtung um "-1" zu korrigieren (siehe E2, (B-R)2 in Tabelle 1). In Abb. 1 ist der Verlauf "(B-R)2" für den 9 Jahre umfassenden Zeitraum der letzten 4 Beobachtungen dargestellt.

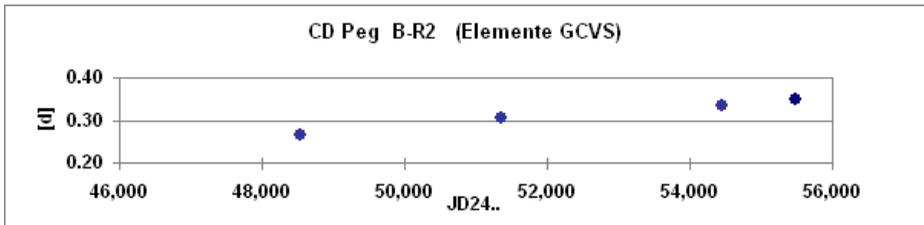


Abb. 1: (B-R)-Diagramm CD Peg mit korrigierten Epochenzuordnungen.

Ableitung neuer Lichtwechselelemente und deren Fehler

Abbildung 1 legt nahe, dass man es hier zunächst mit einem linearen Entwicklungsverlauf für die (B-R)-Werte zu tun hat, was auf einen leicht falschen - in diesem Fall: zu kurzen - Periodenwert hindeutet. Einen groben Korrekturbetrag für die bestehende Periode kann man bereits mittels einfachen Dreisatzes abschätzen: Zwischen erster und letzter Beobachtung liegen 12.158 Epochen, entsprechend 6.942,8 Tagen. Während dieser Zeit nahm der (B-R)-Wert um $0^d.0837$ zu, was zu einem Korrekturwert von $+0^d.0000069$ für die Periode führt, so dass deren neuer Wert Größenordnungsmäßig bei $0^d.5710469$ liegen würde. Schauen wir 'mal, zu welchem Ergebnis die genaue Rechnung gemäß der Methode der kleinsten Quadrate führt.

Aufgrund der unterschiedlichen Qualitäten der vorliegenden Beobachtungen führen wir hier eine gewichtete Ausgleichung durch: die einzelnen Beobachtungen werden entsprechend ihrer Genauigkeit in der Elementenbestimmung mit unterschiedlichen Gewichten p_i gewichtet. Es gibt unterschiedliche Ansätze zur Wichtung von Beobachtungen. Für die hier vorliegenden 4 Beobachtungen schätze ich sie willkürlich wie folgt ab: Aufgrund der Argumentation von Schmidt [5] dürfte es sich bei seinem Maximum als das mit der schlechtesten Qualität handeln. Allerdings rechtfertigt die lange Zeitbasis durchaus eine Berücksichtigung zur Elementenbestimmung. Das Gewicht wird zu $p_1=1$ gesetzt.

Die Arbeit [6] selbst gibt nur wenig Informationen zu den behandelten Sternen; die Daten sollen über das Internet zu beziehen sein, was mir allerdings nicht gelang. Aufgrund der Beschreibung in der Arbeit scheint aber die Annahme berechtigt zu sein, dass das Normalmaximum aus wesentlich mehr Beobachtungen abgeleitet wurde, als bei [5]. Das Gewicht wird willkürlich auf $p_2=3$ gesetzt.

Die Beobachtungen von Frau Maintz und von meiner (Abb. 2) basieren auf durchgängig beobachteten Lichtkurven und erhalten die Gewichte $p_3 = p_4 = 10$.

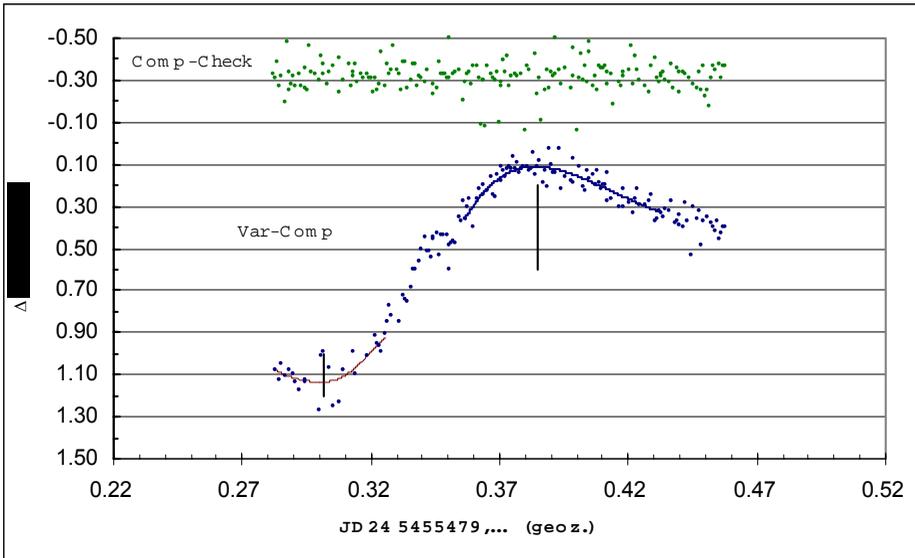


Abb. 2: CD Peg am 9. Okt. 2010 (SB), N=159 Beobachtungen.

Tabelle 2 gibt alle wichtigen Daten in Zusammenhang mit der neuen Elementenbestimmung wider. Dabei wurde als Ausgangsepoche E0 das letzte beobachtete Maximum gewählt.

Nr	Max _{HK} JD24...	p	E	(B-R) _{alt}	(B-R) _{neu}	p*(B-R _{neu})
1	48536.60	1	-12158	0.2652	-0.0039	-0.0039
2	51359.290	3	-7215	0.3045	+0.0032	+0.0097
3	54457.2128	10	-1790	0.3353	-0.0013	-0.0127
4	55479.3883	10	0	0.3489	+0.0007	+0.0069
Summe:						0.0000

Tab. 2: CD Peg – Beobachtungsdaten und (B-R)-Werte

Für die gewichtete Ausgleichung der Beobachtungen nach den Elementen P und E0 sind folgende Summen zu bilden (die eckigen Klammern stehen für die Gaußsche Summenschreibweise. Die von den Klammern eingeschlossenen Größen sind über alle 4 Beobachtungen zu summieren) : $[p]$, $[pE]$, $[pE^2]$, $[py]$ sowie $[pEy]$. Mit "y" ist der beobachtete Maximumzeitpunkt bezeichnet.

Mit den Daten aus Tabelle 2 ergeben sich obige Größen zu:

$$\begin{array}{ll}
 [p] = & 24 \\
 [pE] = & -51,703 \\
 [pE^2] = & 336,026,639
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 [py] = & 1301980.478 \\
 [pEy] = & -2676563923.970
 \end{array}$$

Daraus lassen sich die Elemente und deren Fehler wie folgt berechnen:

$$P = \frac{[pEy][p] - [py][pE]}{[pE^2][p] - [pE]^2} \quad (2) \qquad E_0 = \frac{[pE^2][py] - [pE][pEy]}{[pE^2][p] - [pE]^2} \quad (3)$$

$$\epsilon_P = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{[p]}{[pE^2][p] - [pE]^2}} \quad (4) \qquad \epsilon_{E_0} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{[pE^2]}{[pE^2][p] - [pE]^2}} \quad (5)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[p\,vv]}{N - 2}} \quad (6)$$

σ_0 ist der mittlere Fehler einer der N Beobachtungsgleichungen (in unserem Beispiel ist N=4); "vv" steht für das Quadrat des "(B-R)". Es ist wichtig darauf zu achten, dass im Nenner der Quadratwurzel die

Anzahl der Beobachtungsgleichungen steht, und nicht etwa – wie man fälschlicherweise vermuten könnte – die Summe der Gewichte. Denn unabhängig von den eingeführten Gewichten handelt es sich ja genau um N unabhängige Messungen oder Beobachtungen, die für die Ausgleichung herangezogen werden. N ist noch um die Anzahl der zu schätzenden Parameter – hier "2" für P und E0 – zu reduzieren, da für deren Schätzung mindestens zwei Beobachtungen erforderlich sind. Lügen nur 2 Beobachtungen vor, so kann man keinen Fehler schätzen, da eine Gerade genau durch diese zwei Punkte definiert ist. Über deren Wahrheitsgehalt kann man keine Aussage treffen; die Statistik benötigt hierzu eben mehr als die unbedingt notwendige Anzahl von Beobachtungen. Man spricht auch von der Anzahl der "überschüssigen" Beobachtungen.

Mit den Formeln (2) bis (6) erhalten wir dann:

$$\begin{array}{ll}
 P = & 0^d.57104651 \\
 [pvv] = & 0d^2.00006719 \\
 \epsilon_P = & 0^d.00000039
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 E_0 = & \text{JD } 24\,55479.3873 \\
 \sigma_0 = & 0^d.005796 \\
 \epsilon_{E_0} = & 0^d.0014
 \end{array}$$

Somit sind die linearen Lichtwechselelemente bestimmt und wir erhalten als Ergebnis die **neuen linearen Lichtwechselelemente**:

$ T_{\text{Max,HK}} = \text{JD}24\,55479.3873 + 0^d.57104651 * E \quad (7) $
$ \pm 14 \qquad \pm 39 $

Man beachte, dass die Summe der gewichteten (B-R)-Werte (siehe letzte Spalte Tabelle 2) Null ergibt. Das dient gleichzeitig der Kontrolle der Berechnungen, denn diese Summe muss stets "0" sein!

In Abbildung 3 ist das (B-R)-Diagramm auf Basis der neuen Lichtwechselelemente (7) dargestellt. Die Verbesserung ist deutlich erkennbar (vergleiche allein die Skalen der Ordinaten in Abb.1 und Abb.3).

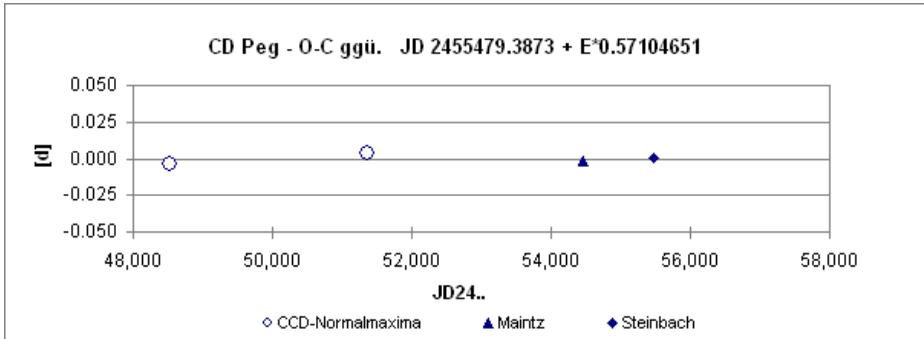


Abb. 3: B-R-Diagramm CD Peg gegenüber neuen Lichtwechselelementen.

Fazit

In dieser Arbeit wurde am Beispiel CD Peg die Berechnung linearer Lichtwechselelemente exemplarisch dargestellt. Ein Vergleich der vorhin durchgeführten ad hoc-Abschätzung für die Periodenkorrektur zeigt, dass diese bereits recht gut mit den genau berechneten Elementen übereinstimmt. Das liegt insbesondere an dem "gutmütigen" Verhalten des Sternes, der vermutlich auch keinen Blazhko-Effekt aufweist – sonst lägen die Beobachtungen nicht so klar auf einer Linie. Apropos: In einem (B-R)-Diagramm sollte man tunlichst vermeiden, die einzelnen Beobachtungen mit Linien zu verbinden. Das ist nicht sinnvoll, da die Beobachtungen fehlerbehaftet sind und die Augen unnötig von der Streuung um die Null-Linie oder ggf. Regressionslinie abgelenkt werden.

Aufgrund seines stabilen Verhaltens scheint es ausreichend zu sein, CD Peg ca. alle 2-5 Jahre einmal zu kontrollieren. CD Peg ist von 50° nördlicher Breite aus von Juni bis Dezember sichtbar.

Quellen:

- [1] Shapley, H., Hughes, E., 1934, *Annals of Harvard College Obs.*, **90**, No. 4
- [2] N.N. Samus, et al., *General Catalogue of Variable Stars (Samus+ 2007-2009)*
- [3] SIMBAD-Database, CDS, Strasbourg, France; <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/>
- [4] GEOS-Datenbank, http://rr-lyr.ast.obs-mip.fr/dbrr/dbrr-V1.0_0.php
- [5] Schmidt, E. G., 1991, *Astronomical Journal*, **102**, p. 1766
- [6] Wils, P. et.al, 2006, *Monthly Notices of the RAS*, **368**, pp. 1757-1763